SUJET DE THÈSE

Titre de la thèse : Quelques problèmes de dynamique linéaire

Directeur de thèse : Frédéric Bayart
Unité de rattachement : Laboratoire de mathématiques Blaise Pascal, UMR 6620
Équipe :Probabilités, Analyse, Statistiques
Établissement de rattachement : Université Clermont Auvergne
Courriel et téléphone : frederic.bayart@uca.fr, (+33) 4 73 40 70 94
Co-encadrant éventuel :
Unité de rattachement :
Établissement de rattachement :

Résumé :

La dynamique linéaire est un sujet très actif de l'analyse fonctionnelle au cours des vingt dernières années. Il s'agit, étant donné un opérateur T agissant sur un espace de Banach X, d'étudier l'ensemble des orbites $\{T^n x ; n>0\}$ d'un vecteur x sous l'action de T. Existe-t-il des orbites denses ? des orbites dont le sous-espace engendré est dense ? quelles sont les propriétés qualitatives de ces orbites ?

Ce sujet mêle de nombreux domaines de l'analyse mathématique : théorie des opérateurs, analyse complexe pour la production et l'étude d'exemples, théorie ergodique. De nombreuses questions autour de ces sujets restent ouvertes, et je propose dans cette thèse d'en étudier deux.

1. Existence d'opérateurs universels pour la dynamique topologique

   On pourrait penser que le dynamique linéaire est moins riche que la dynamique topologique puisqu'on s'impose la restriction de travailler avec des applications linéaires. De façon très étonnante, Feldman a prouvé en 2000 que ce n'est pas le cas : il existe un opérateur T agissant sur un espace de Banach H tel que, pour tout système dynamique S :K->K, où K est compact, il existe une partie M contenue dans H, stable par T, telle que la restriction de T à M est conjuguée à S.

   Cet opérateur T est donc universel au sens qu'il code tous les systèmes dynamiques existants. La première partie de la thèse s'intéressera à l'étude de ces opérateurs universels ? Peut-on trouver une condition nécessaire pour qu'un opérateur soit universel ? Cela permettrait de donner d'autres exemples que celui de Feldman qui à ce jour est encore le seul connu. Quelles sont les propriétés que doit nécessairement vérifier un tel opérateur universel ?

2. Etude de certains problèmes d'existence de vecteurs hypercycliques communs

Lorsqu'un opérateur T admet un vecteur x dont l'orbite est dense, on dit qu'il est hypercyclique, et que x est un vecteur hypercyclique pour T. Lorsqu'on considère une famille d'opérateurs hypercycliques (par exemple, une famille d'opérateurs de translation, ou une famille de décalages pondérés), il est intéressant de se demander s'il existe un vecteur hypercyclique qui soit commun à tous les vecteurs de cette famille. C'est un problème très étudié depuis une dizaine d'années, qui a fait l'objet de progrès récents dans deux directions : pour tous les opérateurs d'un même semigroupe par Bayart, et pour des multiples d'un même opérateur par Shkarin. Ces deux résultats récents utilisent des méthodes assez différentes, et la deuxième partie de la thèse sera consacrée à celles-ci. Le but sera d'obtenir des résultats d'hypercyclicité commune pour tous les multiples des opérateurs d'un même semigroupe.

Directeur : Pr Patrice Malfreyt
tél. 04.73.40.72.04
E-mail : Patrice.Malfreyt@uca.fr

Secrétariat : Suzanne Hernandez
tél. 04.73.40.53.76
E-mail : Secretariat.EDSF@univ-bpclermont.fr

Title of the thesis: Problems in linear dynamics

Supervisor : Pr. Frédéric Bayart
Laboratory : Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal, UMR 6620
University : Université Clermont Auvergne
Email and Phone : frederic.bayart@uca.fr, (+33) 4 73 40 70 94
Possible co-supervisor :
Laboratory :
University :

Summary : Linear dynamics is a very active branch of functional analysis. It studies the orbits of linear operators, namely the sets {$T^n x$;n>0} where T is a continuous linear operator acting on some Banach space X and x is a vector in X. For instance, one is interested in the existence of a dense orbit. This is intimely connected with the invariant subset problem, a famous open question in operator theory.

Linear dynamics involves many parts of analysis : operator theory of course, complex analysis for the study of examples and counterexamples, ergodic theory… Many questions around this subject remain open and in the thesis I plan to study two of them.

3. Universal operators for topological dynamics

One may think that linear dynamics is not as rich as the standard topological dynamics, since we work only with linear maps. Surprizingly, this is not the case : in a seminal paper, in 2000, N. Feldman has exhibited an example on an operator T acting on a Hilbert space H such that, given any dynamical system S :K->K, where K is compact, there exists a subset M of H, invariant by T, such that S is conjugated to the restriction of T to M.

Thus, this operator is called universal for topological dynamics. The first part of the thesis will be devoted to the study of universal operators in this sense. The first thing to be done is to find a nice sufficient condition for an operator to be universal. Hopefully, this would give new examples beyond Feldman's examples. It will also be interesting to study which properties such an operator should have.

4. Common hypercyclicity

We say that an operator T is hypercyclic as soon as it admits a vector x with dense orbit. The vector x is then called a hypercyclic vector for T. When we consider a family of hypercyclic operators (for instance, a family of translation operators or a family of weighted shifts), it is natural to ask whether it admits a common hypercyclic vector, namely a vector x which is hypercyclic for ll operators of the family.

This problem has been widely studied these last ten years. Very recently, important progresses have been made in two directions : when the operators belong to a semigroup, or when the operators are the multiples of the same operator. The technics involved are rather different and the second part of the thesis will be dedicated to their study. The aim will be to combine them, in order to prove positive results for the existence of a common hypercyclic vector for all multiples of operators in a semigroup.

Ecole Doctorale Sciences Fondamentales – 24, avenue des Landais – BP 80026 - 63171 AUBIERE CEDEX
CHIMIE – MATHEMATIQUES – PHYSIQUE – SCIENCES DE L'UNIVERS
site web : http://edsf.univ-bpclermont.fr

Directeur : Pr Patrice Malfreyt
tél. 04.73.40.72.04
E-mail : Patrice.Malfreyt@uca.fr

Secrétariat : Suzanne Hernandez
tél. 04.73.40.53.76
E-mail : Secretariat.EDSF@univ-bpclermont.fr