

# ATELIER PAVAGES

## 1 Paver le plan...

À l'image du cantonnier qui pave une rue, ou d'un maçon qui pose des carreaux sur le sol, nous cherchons à réaliser un "pavage du plan". Pour ce faire, nous considérons un motif (ce sera notre pavé) dessiné sur une feuille de papier, que nous imaginons pouvoir reproduire indéfiniment.

### Définition 1.

On dit que le motif choisi *pave le plan* si par juxtaposition, il nous permet de recouvrir n'importe quelle feuille de papier, aussi grande soit-elle, sans laisser de vide et sans qu'il y ait de chevauchement.

**Exemple :** Un carré, un rectangle, voire un parallélogramme, sont des motifs qui pavent le plan.

## 2 Paver avec des polygones

Pour formaliser le problème, nous imposons au pavé d'être polygonal :

### Définition 2.

Un *polygone* est une portion du plan délimitée par une suite de segments qui se referme. Ces segments sont *les côtés* du polygone. Les extrémités des côtés sont *les sommets* du polygone.

**Exemple :** les triangles, les quadrilatères, les hexagones sont des polygones.

### Question (très loin d'être résolue...).

**Quels sont les polygones qui pavent le plan ?**

Pour simplifier, nous imposons désormais que dans le pavage, deux copies du motif polygonal ne peuvent se toucher qu'en partageant un sommet ou en ayant tout un côté en commun.

**Question 1 :** Est-ce qu'un triangle quelconque pave le plan ?

**Question 2 :** Est-ce qu'un quadrilatère quelconque pave le plan ?

**Question 3 :** Est-ce qu'un pentagone quelconque pave le plan ?

Même dans sa version simplifiée, le problème reste beaucoup trop compliqué et on ne sait pas le résoudre.

## 3 Paver avec un polygone régulier

### Définition 3.

Un polygone est *régulier* si tous ses côtés ont même longueur et tous ses angles aux sommets sont égaux.

**Exemple :** un triangle équilatéral, un carré.

### Question.

**Quels sont les polygones réguliers qui pavent le plan ?**

On vérifie qu'un triangle équilatéral, un carré ou un hexagone régulier pave le plan. **Y a-t-il d'autres polygones réguliers qui pavent le plan ?**

## 4 Paver avec un polygone convexe

### Définition 4.

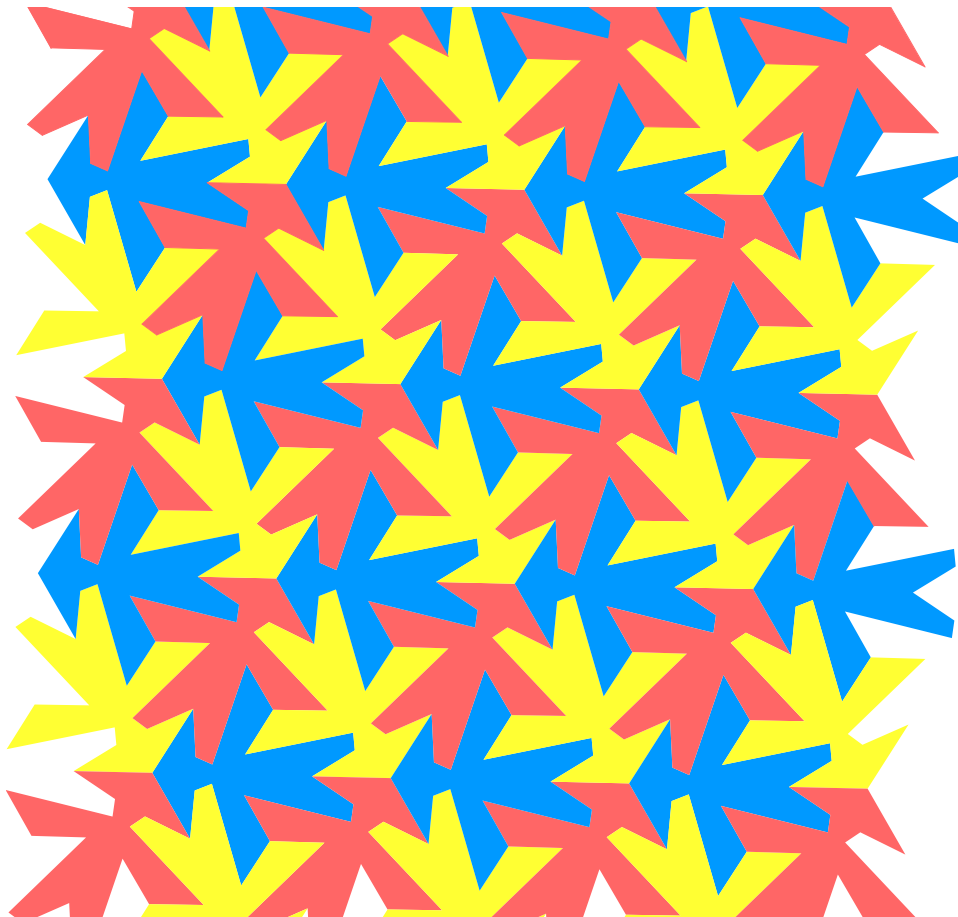
Un polygone est *convexe* si tout segment reliant deux points du polygone est inclus dans le polygone.

On peut montrer le résultat suivant :

### Théorème.

Si un polygone convexe possède au moins 7 côtés, alors il ne pave pas le plan.

Bien-sûr, il est possible de trouver des polygones possédant plus de 7 côtés et qui pavent le plan :



### Bilan.

- Les triangles et les quadrilatères non croisés pavent toujours le plan.
- Seuls certains pentagones convexes pavent le plan. On connaît 15 formes de pentagones convexes qui pavent le plan, et on sait prouver (Rao, 2017) que ce sont les seules.
- Seuls certains hexagones convexe pavent le plan. On connaît 3 formes d'hexagones convexes qui pavent le plan. Et on sait montrer (Reinhart, 1918) qu'il n'y en a pas d'autres.
- Avec 7 côtés ou plus, un polygone convexe ne pave pas le plan.
- Les polygones réguliers qui pavent : les triangles équilatéraux, les carrés et les hexagones réguliers.